3ª LEY DE KEPLER PARA ÓRBITAS ELÍPTICAS

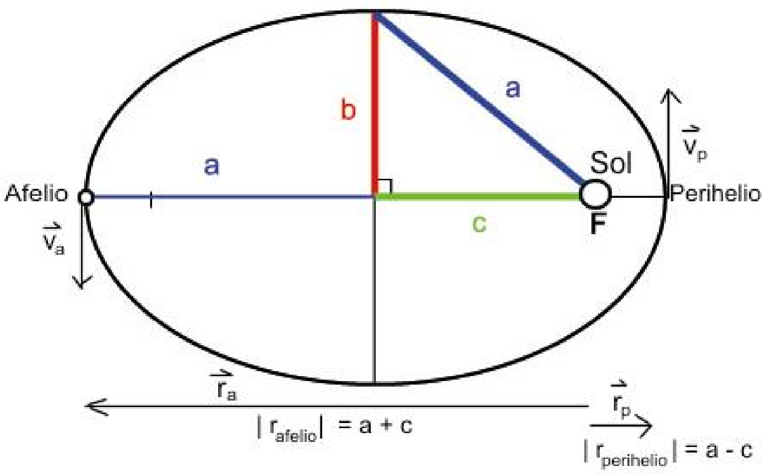
Para toda orbita descripta por un cuerpo como consecuencia de una fuerza central, la velocidad areolar es (2ª Ley de Kepler):

$\boxed{v_{AREOLAR} = \frac{dA}{dt} \Rightarrow v_{AREOLAR} = \frac{A}{T} = \frac{\pi.a.b}{T}}$ siendo A el área de una elipse, a, el semieje mayor y b el semieje menor

También se dedujo: $\boxed{v_{AREOLAR} = \frac{L}{2m}}$

Por tanto $\frac{\pi.a.b}{T} = \frac{L}{2m}$

L (momento angular) es constante (1ª Ley de Kepler) y por lo tanto su valor es el que tenga en cualquiera de las posiciones que puede tomar. Consideremos el afelio → L = rmv sen 90 = rmv



a + c → distancia afelio al Sol
a – c → distancia perihelio al Sol

Si c es la distancia focal, se cumplirá que: $L = r_A.m.v = (a+c).m.v_1$ y sustituyendo en la ecuación anterior tenemos:

$\frac{\pi.a.b}{T} = \frac{(a+c).m.v_1}{2m}$ siendo v_1 la velocidad en el afelio.

Despejando el periodo y elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$T^2 = \frac{4\pi^2.a^2.b^2}{(a+c)^2.v_1^2}$$

Como el momento angular es constante, hallamos la relación entre las velocidades en el afelio y en el perihelio, posiciones en las cuales el vector posición es perpendicular al vector velocidad:

$(a+c).v_1 = (a-c).v_2$ siendo v_2 la velocidad en el perihelio

Despejamos v_2 → $v_2 = \frac{(a+c).v_1}{a-c}$

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}m.v_1^2 - \frac{GMm}{a+c} = \frac{1}{2}m.v_2^2 - \frac{GMm}{a-c}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = GM.(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a-c})$$

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_1^2\frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}) = GM.\left(\frac{a-c-a-c}{(a+c).(a-c)}\right)$$

$$\frac{1}{2}v_1^2\left(\frac{(a-c)^2-(a+c)^2}{(a-c)^2}\right) = GM.\left(\frac{-2.c}{(a+c).(a-c)}\right)$$

$$\frac{1}{2}v_1^2\left(\frac{-4.a.c}{a-c}\right) = GM.\left(\frac{-2.c}{a+c}\right) \rightarrow v_1^2.\left(\frac{a}{a-c}\right) = GM.\left(\frac{1}{a+c}\right)$$

$$v_1^2 = GM \ \frac{a-c}{a\ (a+c)}$$

Sustituimos v_1 en $T^2 = \frac{4\pi^2.a^2.b^2}{(a+c)^2.v_1^2} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2.a^2.b^2}{(a+c)^2.GM \ \frac{a-c}{a\ (a+c)}}$

Simplificando y haciendo la división:

$$T^2 = \frac{4\pi^2.a^3.b^2}{GM(a+c)(a-c)} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2.a^3.b^2}{GM(a^2-c^2)}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2.a^3}{GM}} \qquad \boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Así pues, la 3ª Ley de Kepler es aplicable a órbitas elípticas siempre que se considere el radio de la órbita como la semisuma de las distancias del perihelio y el afelio al Sol.

$$\boxed{a = \frac{r_p + r_a}{2}}$$