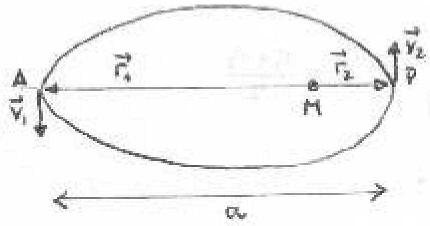
ENERGIA MECANICA DE UN PLANETA EN ORBITAS ELIPTICAS

- Aplicamos los principios de conservación de la energía mecánica y del momento angular orbital en el perihelio y en el afelio de la trayectoria.
- Tenemos en cuenta que el semieje mayor de la elipse es la semisuma de las distancias del perihelio y el afelio al Sol. $\Rightarrow a = \frac{r_1+r_2}{2}$



$$E_m = (E_c+E_p)_A = (E_c+E_p)_P \quad \begin{cases} E_c = \frac{1}{2}mv^2 \\ E_p = -G\frac{Mm}{r} \end{cases}$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow L = rmv \operatorname{sen}\alpha$$

En el perihelio y el afelio $\alpha = 90 \rightarrow L = rmv$

$$L = r_1 m v_1 = r_2 m v_2 \rightarrow r_1 v_1 = r_2 v_2 \quad (\text{II})$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{r_2} \quad (\text{I})$$

De I obtenemos $\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = GMm\left(\frac{r_1-r_2}{r_2 r_1}\right)$

De II obtenemos $v_2 = \frac{r_1 v_1}{r_2}$ y lo sustituimos en la ecuación anterior

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r_1^2 v_1^2}{r_2^2} - v_1^2\right) = GMm\left(\frac{r_1-r_2}{r_2 r_1}\right)$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r_1^2 v_1^2 - r_2^2 v_1^2}{r_2^2}\right) = GMm\left(\frac{r_1-r_2}{r_2 r_1}\right)$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_1^2(r_1^2-r_2^2)}{r_2^2}\right) = GMm\left(\frac{r_1-r_2}{r_2 r_1}\right) \qquad \text{Como } r_1^2 - r_2^2 = (r_1+r_2)(r_1-r_2)$$

$$\frac{1}{2}m\,\frac{v_1^2(r_1+r_2)\cancel{(r_1-r_2)}}{r_2^{\cancel{2}}} = GMm\,\frac{\cancel{(r_1-r_2)}}{\cancel{r_2}r_1} \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2\,\frac{r_1+r_2}{r_2} = \frac{GMm}{r_1}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{GMm r_2}{r_1(r_1+r_2)} \qquad \text{Sustituimos esta expresión en (I)}$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{r_1} \Rightarrow E_m = \frac{GMm r_2}{r_1(r_1+r_2)} - \frac{GMm}{r_1}$$

$$E_m = \frac{GMm}{r_1}\left(\frac{r_2}{r_1+r_2} - 1\right) \rightarrow E_m = \frac{GMm}{r_1}\left(\frac{\cancel{r_2} - r_1 - \cancel{r_2}}{r_1+r_2}\right)$$

$$E_m = -\frac{GMm\cancel{r_1}}{\cancel{r_1}(r_1+r_2)} \rightarrow \boxed{E_m = -\frac{GMm}{r_1+r_2}}$$

$$\text{Como } a = \frac{r_1+r_2}{2} \Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{GMm}{2a}}$$

Hemos demostrado que la Em de un planeta de masa m que describe una órbita elíptica en torno al Sol (que se encuentra en uno de los focos de la elipse) es $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ siendo a, el semieje mayor de la elipse.