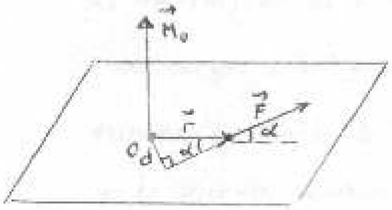
MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO



$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_0 = r\,F\,\text{sen}\,\alpha$$

$$d = r\,\text{sen}\,\alpha$$

$$M_0 = F \cdot d$$

$\vec{M}_0$ = momento de la fuerza que actúa sobre la partícula respecto del punto O.

MOMENTO ANGULAR O CINÉTICO DE UNA PARTÍCULA

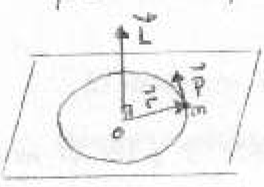
Para describir el movimiento de una partícula que gira en un plano alrededor de un punto fijo del mismo, se introduce una magnitud llamada momento angular o cinético.

Esta magnitud desempeña el mismo papel en el movimiento de rotación que la cantidad de movimiento o momento lineal en el movimiento de traslación.

- Momento lineal (o cantidad de movimiento) de una partícula es una magnitud vectorial, de la misma dirección y sentido que la velocidad, igual al producto de la masa de la partícula por la celeridad que posee en cada instante. Se representa por $\vec{p}$.

  $$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

- Momento angular o cinético de una partícula es el producto vectorial del radiovector que fija la posición de la partícula en cada instante por el momento lineal que posee dicha partícula.



$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

$L = r\,m\,v\,\text{sen}\,\alpha$ $\qquad \alpha$: ángulo formado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$

$\vec{L}_0$: es un vector perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$ y su sentido viene determinado por la regla de Maxwell, suponiendo que la dirección de $\vec{r}$ se superponga a la de $\vec{p}$ por el camino más corto.

Como
$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$$
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$
$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

Si derivamos esta expresión respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Como $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ y $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times (m\vec{v})}_{0} + \vec{r} \times \vec{F}$$

0 pues $\vec{v}$ y $\vec{p}$ tienen la misma dirección $\Rightarrow |\vec{v} \times (m\vec{v})| = v \cdot mv \underbrace{\operatorname{sen} \alpha}_{0} = 0$

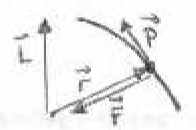
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{y como} \qquad \vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0}$$

$$\vec{L} = \text{CTE} \quad \text{si} \quad \frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{M}_0 = 0 \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Este producto vectorial es cero si:

- No actúa ninguna fuerza sobre el cuerpo $\Rightarrow$ En este caso, el cuerpo tendría un movimiento rectilíneo uniforme
- Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección ($\operatorname{sen} \alpha = 0$). Este es el caso de las llamadas "fuerzas centrales", que son fuerzas dirigidas hacia un punto fijo siempre.



El momento angular de un cuerpo permanece constante si sobre él no actúan fuerzas o las fuerzas que actúan son centrales.

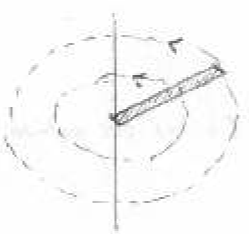
Como $\vec{L}$ es constante, lo es en módulo, dirección y sentido $\Rightarrow$ la trayectoria de un punto material que se mueve bajo la acción de una fuerza central es siempre plana.

SÓLIDO RÍGIDO

Es un conjunto de partículas que ocupan posiciones relativas fijas entre sí o con respecto a un origen arbitrario cualquiera.

Mientras que en la traslación de un cuerpo, no necesitamos considerar sus dimensiones y lo podemos aproximar a una partícula, en la rotación de un cuerpo lo aproximamos a un sólido rígido ya que un punto no puede girar sobre sí mismo.

MOMENTO ANGULAR DE UN SÓLIDO RÍGIDO



Sea una barra que gira alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos. Cuando la barra gira, cada una de sus partículas realiza un movimiento circular alrededor del eje.

$$\vec{L} = \Sigma \vec{L}_i = \Sigma (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \Sigma (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

Para cada partícula, por ej. $m_1 \rightarrow \vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1$

y su módulo es $L_1 = r_1 m_1 v_1 \operatorname{sen} 90 = r_1 m_1 v_1$

Como $v_1 = \omega r_1 \rightarrow L_1 = m_1 r_1^2 \omega$

Para todas las partículas:

$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \cdots + m_n r_n^2 \omega$$

$$L = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \cdot \omega$$

Si llamamos $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \rightarrow$ MOMENTO DE INERCIA (magnitud escalar)

Unidad S.I $\rightarrow Kg \cdot m^2$

El momento de inercia de un sólido depende de la masa y de la distribución de esa masa con respecto al eje de rotación. Por tanto, un sólido tendrá infinitos momentos de inercia, tantos como ejes de rotación se elijan.

$$\boxed{L = I\omega}$$

Si la masa representa una oposición a los cambios en los movimientos de traslación, el momento de inercia es una oposición a los cambios en el estado de rotación de un cuerpo.

$\vec{L}$ representa el estado de rotación de un cuerpo, mientras que $\vec{p}$ representa el estado de traslación lineal.

Si para cambiar la cantidad de movimiento de un cuerpo tenemos que ejercer una fuerza, para variar el momento angular de un cuerpo, es decir, modificar su estado de rotación, utilizaremos el momento de una fuerza. Partimos de $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \text{Como } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad y \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\alpha}}$$ ECUACION FUNDAMENTAL DE LA DINAMICA DE ROTACION

$$\text{Si } \vec{L} = \text{CTE} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{M} = 0$$

CONSERVACION DEL MOMENTO ANGULAR EN ROTACION

Si sobre un sólido no actúa momento de fuerza alguno (o los que actúan se anulan), el momento angular permanece constante.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{CTE}$$

Este hecho es muy importante, cuando en un sistema aislado (ausencia de fuerzas externas) cambia la distribución de la masa, el momento de inercia varía y su velocidad angular también.

$$L = I\omega = I'\omega'$$

$$\text{Si } I' < I \Rightarrow \omega' > \omega$$

ENERGIA CINETICA DE ROTACION

Sea un sólido que rota alrededor de un eje. Todas sus partículas describen movimientos circulares alrededor del eje, con una velocidad que estará relacionada con su velocidad angular.

La E_c de una partícula del sólido será $E_{c_1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\omega r_1)^2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega$

ω es la misma para todas las partículas, así para todas las partículas:

$$E_{c_r} = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots + m_nr_n^2)\,\omega^2$$

$$\boxed{E_{c_r} = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

Si multiplicamos y dividimos por I $\rightarrow$ $E_{c_r} = \frac{1}{2}\frac{I^2\omega^2}{I}$

$$\boxed{E_{c_r} = \frac{L^2}{2I}} \qquad \text{ya que } L = I\omega$$