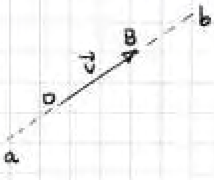
Magnitudes escalares : Son las que quedan definidas por un valor numérico y la unidad. Ej: masa, tiempo, etc

Magnitudes vectoriales : Son las que necesitan para quedar definidas un valor numérico y la unidad así como la indicación de su dirección y sentido. Ej: velocidad, fuerza, aceleración, etc

VECTOR. ELEMENTOS DE UN VECTOR

Un vector es un segmento orientado, que está determinado por cuatro elementos : punto de aplicación, intensidad o módulo, dirección y sentido.



Punto de aplicación : punto donde se ejerce directamente la acción del vector (punto o)

Intensidad o módulo : longitud del vector (módulo del segmento $\overline{oB}$)

Dirección : recta que contiene al vector (recta ab)

Sentido : orientación del vector (B)

CLASES DE VECTORES

Los vectores pueden ser libres, deslizantes, fijos y unitarios.

VECTORES LIBRES : Son aquellos que pueden moverse libremente pero manteniendo paralela su dirección.

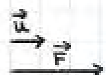
VECTORES DESLIZANTES : Son aquellos cuyo punto de aplicación está ligado a una recta y se pueden trasladar a cualquier punto de la dirección en la que se encuentran

VECTORES FIJOS : Son aquellos vectores que tienen su punto de aplicación perfectamente definido en el espacio.

VECTORES UNITARIOS : Son aquellos vectores que tienen como módulo la unidad ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ó $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$)

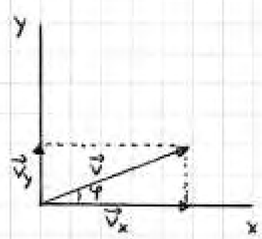
COMPONENTES DE UN VECTOR

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR : Es otro vector de la misma dirección y sentido cuyo módulo es el producto del módulo del vector por el escalar.



Ej: $\vec{p} = m\,\vec{v}$ $\quad |\vec{p}| = m\,|\vec{v}|$

Ej: Un vector unitario en la dirección de una fuerza $\vec{F}$ $\quad \vec{F} = |F|.\vec{u}$



Las componentes del vector $\vec{v}$, es decir, $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$ son sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas. Su módulo es :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \text{Vectorialmente} \quad \vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_x = v_x \vec{i} \\ \vec{v}_y = v_y \vec{j}\end{array}\right\} \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}v_x = v \cos\varphi \\ v_y = v \operatorname{sen}\varphi\end{array}\right\} \quad \vec{v} = v\cos\varphi\,\vec{i} + v\operatorname{sen}\varphi\,\vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = v\,(\underbrace{\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}}_{\vec{u}})$$

El vector $(\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j})$ tiene de módulo la unidad ya que

$$\sqrt{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi} = 1 \qquad \vec{v} = v.\vec{u}$$

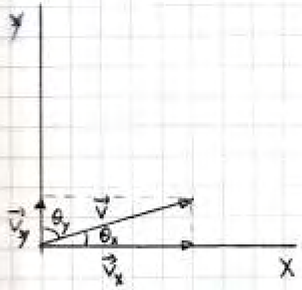
siendo $\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}$

El ángulo de inclinación φ nos indica la dirección del vector $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_y}{v_x}$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x}$$

COMPONENTES DE UN VECTOR SEGUN COSENOS DIRECTORES

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$



Los cosenos directores son los cosenos de los ángulos que forma el vector con los ejes de coordenadas

$$\cos\theta_x = \frac{v_x}{v} \qquad \cos\theta_y = \frac{v_y}{v}$$

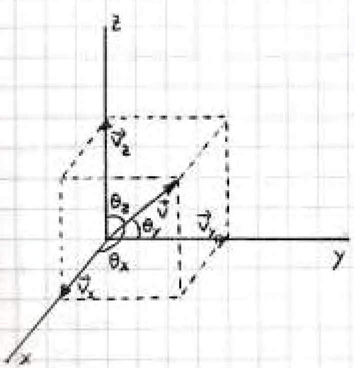
$$\vec{v} = v\cos\theta_x \vec{i} + v\cos\theta_y \vec{j}$$

$$\vec{v} = v(\cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j}) \rightarrow \vec{v} = v\,\vec{u}$$

$$\vec{u} = \cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} \rightarrow |u| = \sqrt{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y} = 1$$

También: $\vec{u} = \frac{v_x}{v}\vec{i} + \frac{v_y}{v}\vec{j}$

EN EL ESPACIO:



Sea el vector $\vec{v}$, y sus componentes rectangulares $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ y $\vec{v}_z$, así como los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Si proyectamos $\vec{v}$ sobre cada eje:

$$v_x = v\cos\theta_x$$
$$v_y = v\cos\theta_y$$
$$v_z = v\cos\theta_z$$

$$\vec{v} = v\cos\theta_x \vec{i} + v\cos\theta_y \vec{j} + v\cos\theta_z \vec{k}$$

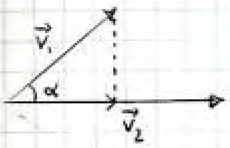
$$\vec{v} = v(\cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k})$$

Como $\vec{v} = v.\vec{u}$

$$\vec{u} = \cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k} \rightarrow |u| = \sqrt{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z} = 1$$

Además: $\vec{u} = \frac{v_x}{v}\vec{i} + \frac{v_y}{v}\vec{j} + \frac{v_z}{v}\vec{k}$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES



El producto escalar de dos vectores es un escalar que se obtiene de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos\alpha}$$

Podemos observar que el producto escalar de dos vectores es el producto de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él.

CONCLUSIONES :
- Si dos vectores son paralelos $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|$ ya que $\cos\alpha = \cos 0 = 1$
- Si dos vectores son perpendiculares $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$ ya que $\cos\alpha = \cos 90 = 0$

Si lo aplicamos a vectores unitarios :

$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0 = 1$ $\qquad$ $\vec{i} \cdot \vec{j} = |i| \cdot |j| \cdot \cos 90 = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ $\qquad$ $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

Si tenemos dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ y :

$\vec{V}_1 = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ $\qquad$ $|V_1| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

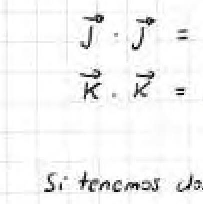
$\vec{V}_2 = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ $\qquad$ $|V_2| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \cdot (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = A_x \cdot B_x + A_y B_y + A_z B_z}$$

Como $\cos\alpha = \dfrac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} \rightarrow \cos\alpha = \dfrac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|}$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES



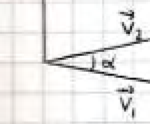
El producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular al plano en el que se encuentran los dos vectores y su signo depende de que el giro del primer vector al segundo por el camino más corto sea horario (-) o antihorario (+). Su módulo es el producto de los módulos de los vectores por el seno del ángulo que forman.

$\vec{V}_1 = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$\vec{V}_2 = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$

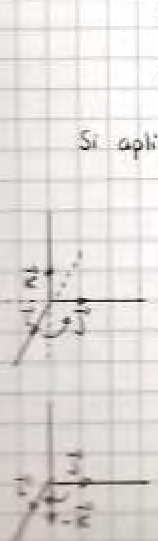
Si aplicamos el producto vectorial a los vectores unitarios, tenemos :

$\vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \operatorname{sen} 0 = 0$ $\qquad$ Analogamente $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$



$\vec{i} \times \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \operatorname{sen} 90 = \vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{i} = |\vec{j}| \cdot |\vec{i}| \cdot \operatorname{sen} 90 = -\vec{k}$



Analogamente :

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

Por tanto $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = A_x B_x \, \vec{i} \times \vec{i} + A_x B_y \, \vec{i} \times \vec{j} + A_x B_z \, \vec{i} \times \vec{k} + A_y B_x \, \vec{j} \times \vec{i} + A_y B_y \, \vec{j} \times \vec{j} + A_y B_z \, \vec{j} \times \vec{k} + $$
$$+ A_z B_x \, \vec{k} \times \vec{i} + A_z B_y \, \vec{k} \times \vec{j} + A_z B_z \, \vec{k} \times \vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = A_x B_y \vec{k} + A_x B_z (-\vec{j}) + A_y B_x (-\vec{k}) + A_y B_z \vec{i} + A_z B_x \vec{j} + A_z B_y (-\vec{i})$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = A_x B_y \vec{k} - A_x B_z \vec{j} - A_y B_x \vec{k} + A_y B_z \vec{i} + A_z B_x \vec{j} - A_z B_y \vec{i}$$

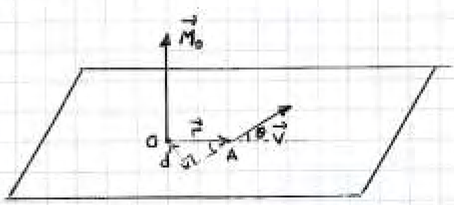
$$\boxed{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}}$$

Por determinantes:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}$$

MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO



Si consideramos la definición de producto vectorial, el producto $\vec{r} \times \vec{V}$ será un vector perpendicular al plano de los dos vectores que llamamos $\vec{M}_o$

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{V} \quad \text{cuyo módulo es:}$$

$$|\vec{M}_o| = |\vec{r}| . |\vec{V}| . \operatorname{sen} \theta$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} \theta = \frac{d}{r} \rightarrow |\vec{M}_o| = \frac{|\vec{r}| . |\vec{V}| \cdot d}{|\vec{r}|}$$

$$|\vec{M}_o| = |\vec{V}| . d$$

d = distancia del punto O a la recta de acción del vector

El momento mide la tendencia del vector $\vec{V}$ a imprimir al sólido rígido una rotación alrededor del eje dirigido según $\vec{M}_o$.