

1. Un meteorito de 100 kg de masa se encuentra inicialmente en reposo a una distancia sobre la superficie terrestre igual a 6 veces el radio de la Tierra. a) ¿Cuánto pesa en ese punto? b) ¿Cuánta energía mecánica posee? c) Si cae a la Tierra ¿con qué velocidad llegará a la superficie? Datos: Constante de Gravitación $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}$; Masa de la Tierra $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$; Radio de la Tierra $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

$$m = 100 \text{ Kg}$$

$$h = 6R_T$$

$$r = R_T + h = R_T + 6R_T = 7R_T$$

$$G, M_T, R_T$$

$$\text{a)} F = mg = G \frac{M_T m}{r^2}$$

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{(7 \cdot 6,37 \cdot 10^6)^2} = 20,06 \text{ N}$$

$$\text{b)} E_m = E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$E_m = -\frac{GMm}{r} \quad E_m = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{7 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = -8,94 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$\text{c)} (E_p)_r = W + E_{p,\text{sup}} \rightarrow -\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{R_T}$$

$$-\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = \frac{1}{2}v^2 - 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}$$

$$-8,945 \cdot 10^6 = \frac{1}{2}v^2 - 6,262 \cdot 10^6$$

$$V = 10360,63 \text{ m/s}$$

2. Se consideran dos satélites, uno en órbita alrededor de Marte y otro alrededor de la Tierra: a) ¿Cuál es la relación entre los radios de las órbitas si ambos tienen el mismo periodo? b) Supongamos ahora que los satélites están en órbitas del mismo radio, cada uno alrededor de su planeta. Calcula la relación entre los momentos angulares orbitales correspondientes, si las masas de los satélites son iguales. Dato: $M_M = 0,11 M_T$; $R_M = 0,5 R_T$

$$T_M = T_T \quad \text{a)} F_g = F_c \quad G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = m \omega^2 r = \frac{m 4\pi^2 r}{T^2} \rightarrow \frac{GM}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_M = 0,11 M_T \\ R_M = 0,5 R_T \end{array} \right\} \quad \frac{\frac{GM_M}{4\pi^2}}{\frac{GM_T}{4\pi^2}} = \frac{\frac{r_M^3}{T_M^2}}{\frac{r_T^3}{T_T^2}} \rightarrow \frac{M_M}{M_T} = \frac{r_M^3 \cdot T_T^2}{r_T^3 \cdot T_M^2} \quad \frac{r_M}{r_T} = \sqrt[3]{\frac{M_M}{M_T}}$$

$$\frac{r_M}{r_T} = \sqrt[3]{\frac{0,11 M_T}{M_T}}$$

$$\frac{r_M}{r_T} = 0,479$$

$$\text{b)} r_M = r_T \quad m_M = m_T \quad \frac{L_M}{L_T} = \frac{r_M m_M v_M}{r_T m_T v_T} \quad \frac{L_M}{L_T} = \sqrt{\frac{GM_M}{r_M}} \quad \rightarrow \quad \frac{L_M}{L_T} = \sqrt{\frac{\frac{GM_M}{r_M}}{\frac{GM_T}{r_T}}} = \sqrt{\frac{M_M}{M_T}}$$

$$F_g = F_c \quad G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{L_M}{L_T} = \sqrt{\frac{0,11 M_T}{M_T}} = \sqrt{0,11} = 0,33$$

$$\frac{L_M}{L_T} = 0,33$$

3. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular alrededor de un planeta. La velocidad de escape a la atracción desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie del planeta
 a) ¿A qué altura se encuentra y cuál es su velocidad orbital? b) Calcular su momento lineal c) Calcular el potencial gravitatorio en la órbita del satélite d) ¿Qué trabajo realiza al describir una órbita completa? Razonarlo. Datos: Radio del planeta = 6000 km; Masa del planeta = $4 \cdot 10^{24}$ kg; Constante de Gravitación $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}$

$$m = 200 \text{ kg} \quad a) v_e = \frac{v_e}{2} \quad \text{Si } E_m = 0 \rightarrow v = v_e \quad \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M m}{r} = 0 \quad v_e = \sqrt{\frac{2 G M}{r}}$$

$$R_p = 6000 \cdot 10^3 \text{ m} \quad \sqrt{\frac{2 G M_p}{r}} = \frac{\sqrt{2 G M_p}}{2} \rightarrow \frac{2 G M_p}{r} = \frac{\sqrt{2 G M_p}}{4} = \frac{2 G M_p}{4 R_p}$$

$$M_p = 4 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad r = 4 R_p \rightarrow r = 4 \cdot 6 \cdot 10^6 \text{ m} \rightarrow r = 2 \cdot 4 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2} \quad \text{velocidad orbital } F_g = F_c \rightarrow G \frac{M_p m}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_p}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 4 \cdot 10^7}} \quad h = r - R_p = 2 \cdot 4 \cdot 10^7 - 6 \cdot 10^6 \quad h = 1,8 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$v = 3334,17 \text{ m/s}$$

$$b) p = m v$$

$$p = 200 \cdot 3334,17 = 666834 \text{ kg m/s} \quad p = 6,67 \cdot 10^5 \text{ kg m/s}$$

$$c) V = \frac{E_p}{m} = -\frac{G \frac{M_p m}{r}}{m} = -G \frac{M_p}{r} \quad V = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{4 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 4 \cdot 10^7} = -1,11 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

d) Se trata de una superficie equipotencial ya que $r = \text{CTE} \Rightarrow \Delta E_p = 0$

$$W = -\Delta E_p \Rightarrow W = 0 \quad \text{No se realiza trabajo.}$$

También, al ser una órbita circular $V = \text{CTE}$ y como se trata de un campo conservativo $\Delta E_p + \Delta E_c = 0 \Rightarrow \Delta E_c = 0 \Rightarrow \Delta E_p = 0 \Rightarrow W = 0$.

4. Considere un satélite artificial de 950 kg de masa con una órbita alrededor de la Tierra contenida en el plano del Ecuador a) ¿A qué distancia del centro de la Tierra ha de encontrarse el satélite para que la órbita sea geoestacionaria? b) ¿Cuánto vale el momento angular de este satélite geoestacionario? c) ¿Cuál es la velocidad en el perigeo de otro satélite de igual masa si se mueve en una órbita elíptica con un apogeo de 36500 km y un perigeo a 8200 km del centro de la Tierra?
 Datos: Constante de Gravitación $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}$; Masa de la Tierra $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$m = 950 \text{ kg}$ órbita geoestacionaria $\Rightarrow T = 1 \text{ día} = 86400 \text{ s}$.

$$G, M_T \quad a) F_g = F_c \rightarrow G \frac{M m}{r^2} = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r = m \frac{4 \pi^2 r}{T^2} \rightarrow G \frac{M m}{r^2} = \frac{m 4 \pi^2 r}{T^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM T^2}{4 \pi^2}} \quad r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4 \pi^2}} = 4225 \cdot 10^7 \text{ m} \quad r = 423 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$b) L = r m v \text{ y } L = r m v \text{ ya que } \vec{r} \perp \vec{p} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4225 \cdot 10^7}} = 3072,56 \text{ m/s}$$

$$L = 423 \cdot 10^7 \cdot 950 \cdot 3072,56 \quad L = 1,23 \cdot 10^{14} \text{ kg m}^2 \text{s}$$

$$c) E_m = -G \frac{M m}{2a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - G \frac{M m}{r_p} = \frac{1}{2} m v_p^2 - G \frac{M m}{r_a} \quad r_p = 8,2 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$r_a = 3,65 \cdot 10^7 \text{ m}$$



$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{8,2 \cdot 10^6 + 3,65 \cdot 10^7}{2} = 2,235 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$-G \frac{M m}{2a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - G \frac{M m}{r_p} \rightarrow -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 2,235 \cdot 10^7} = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{8,2 \cdot 10^6}$$

$$-8,923 \cdot 10^6 = \frac{1}{2} v_p^2 - 4,864 \cdot 10^7 \quad v_p = 8912,8 \text{ m/s}$$